Ñïîñîáû âû÷èñëåíèÿ íîðìàëüíîãî ðàñïðåäåëåíèÿ

Ï .Í .Äóáí åð

infoscope@writeme.com

http://learn.at/infoscope

http://read.at/infoscope

http://now.at/infoscope

Íîðìàëüíîå ðàñïðåäåëåíèå – îäíî èç ñàìûõ ðàñïðîñòðàíåííûõ â ñòàòèñòè÷åñêîé ïðàêòèêå. Êðîìå òîãî, ôóíêöèÿ $\Phi(x)$ *ñòàíäàðòíîãî* íîðìàëüíîãî ðàñïðåäåëåíèÿ (ñ íóëåâûì ñðåäíèì è åäèíè÷íîé äèñïåðñèåé), çàäàâàåìàÿ ôîðìóëîé

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt\text{ , ãäå }\varphi(t)=\exp\left(t^2/2\right)/\sqrt{2\pi}\text{ ,}$$

âîçíèêàåò âî ìíîæåñòâå çàäà÷, äàëåêèõ, êàçàëîñü áû, îò òåîðèè âåðîÿòíîñòåé. Ìîæåò áûòü, èìåííî èç-çà ýòîãî èìååòñÿ òàê ìíîãî ñïîñîáîâ åå âû÷èñëåíèÿ.

Â äàííîì òåêñòå íåñêîëüêî ìåòîäîâ, ïîçâîëÿþùèõ âû÷èñëÿòü $\Phi(x)$, ñðàâíèâàþòñÿ ïî óñòîé÷èâîñòè è ñêîðîñòè äîñòèæåíèÿ çàäàííîé òî÷íîñòè. Áîëüøàÿ ÷àñòü âûâîäîâ îñíîâàíà íà ðåçóëüòàòàõ ìàøèííûõ ýêñïåðèìåíòîâ, äëÿ ÷åãî àëãîðèòìû áûëè ðåàëèçîâàíû íà ÿçûêå Ñè.

Îñíîâíûå ðàçëîæåíèÿ

Â ýòîì ïàðàãðàôå îïèñàíû àëãîðèòìû, ïîçâîëÿþùèå, â ïðèíöèïå, âû÷èñëÿòü $\Phi(x)$ ñ ïðîèçâîëüíîé òî÷íîñòüþ: îøèáêè âñåãäà âîçíèêàþò èç-çà êîíå÷íîé ðàçðÿäíîñòè. Àëãîðèòìû îñíîâàíû íà ðàçëîæåíèè â ðÿäû Òåéëîðà è öåïíûå äðîáè ôóíêöèè, ñâÿçàííûõ ñ $\Phi(x)$ ïðîñòûìè ñîîòíîøåíèÿìè. Ñòðóêòóðà âñåõ ýòèõ àëãîðèòìîâ îïèñûâàåòñÿ â ïðèëîæåíèè **À**; êîäû íà Ñè ñîäåðæàòñÿ â ïðèëîæåíèÿõ **Â** è **Ã**.

Âåðîÿòíî, íàèáîëåå èçâåñòíûìè ñîîòíîøåíèÿìè, ïîçâîëÿþùèìè âû÷èñëÿòü $\Phi(x)$ ñ ïðîèçâîëüíîé òî÷íîñòüþ, ÿâëÿþòñÿ

$$\Phi(x) = 0.5 + I(x),$$

(1) $$I(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}.$$

Ýòî ðàçëîæåíèå ëåãêî ïîëó÷èòü, èíòåãðèðóÿ ïî÷ëåííî ðàçëîæåíèå Òåéëîðà â íóëå ôóíêöèè $\exp(-x^2/2)$. Õîòÿ ïðè ýòîì ïîëó÷àåòñÿ çíàêîïåðåìåííûé ðÿä, ïåðâûå îòáðîøåííûå åãî ÷ëåíû íå ÿâëÿþòñÿ, âîîáùå ãîâîðÿ, âåðõíåé ãðàíèöåé äëÿ îñòàòêà, ò.ê. åãî ÷ëåíû ìîíîòîííî óáûâàþò, ëèøü íà÷èíàÿ ñ íåêîòîðîãî. Òåì íå ìåíåå, äîâîëüíî ëåãêî óáåäèòüñÿ â òîì, ÷òî ïðè $\varepsilon < 1/\sqrt{2\pi} = 0.3989\ldots$ ýòî ïðèÿòíîå ñâîéñòâî èìååò ìåñòî. À òàê êàê â ëþáîé ïðàêòè÷åñêîé çàäà÷å $\varepsilon << 0.1$, ìîæíî ñ÷èòàòü, ÷òî åñëè âûïîëíåíî íåðàâåíñòâî

(2) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\left|x^{2n+1}\right|}{2^n n!(2n+1)} \le \varepsilon,$$

òî ñóììà n ïåðâûõ ÷ëåíîâ ðÿäà äîñòàâëÿåò I(x) ñ òî÷íîñòüþ ε (åñëè, êîíå÷íî, íå ó÷èòûâàòü íàêîïëåíèå îøèáêè).

Àëãîðèòì I. Ýòîò àëãîðèòì îñíîâûâàåòñÿ íà ðàçëîæåíèè (1). Îáðàòèòå âíèìàíèå: ïðè n-ì âûïîëíåíèè øàãà I2 ïåðåìåííàÿ m ðàâíà 2n, òàê ÷òî t çäåñü äåëèòñÿ âñå-òàêè íà $2^n n!$. Ðàçëîæåíèå (1) áûëî èñïîëüçîâàíî â àëãîðèòìå 272 [12], êîòîðûé, îäíàêî, çíà÷èòåëüíî ìåíåå ýêîíîìåí, ÷åì íèæåñëåäóþùàÿ âåðñèÿ.

```
I1. Ïîëîæèòü t=sum=x; x2=x*x; m = 2.
I2. Ïîëîæèòü t=-x2*t/m; s=sum; sum=s+t/(m+1); m=m+2.
I3. Åñëè |s-sum| > e, òî ïåðåéòè ê I2.
I4. Ïîëîæèòü Φ = 0.5 + sum/√2π.
```

Ìåíåå èçâåñòíûìè, íî ñòîëü æå ïðîñòî ïîëó÷àåìûìè, êàê (1), ÿâëÿþòñÿ ñîîòíîøåíèÿ

$$\Phi(x) = 0.5 + \varphi(x)\overline{R}(x)$$

(3) $$\overline{R}(x) = I(x)/\varphi(x) = \sum_{n\ge 0} t_n \text{, ãäå } t_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Ýòî ðàçëîæåíèå äëÿ $\overline{R}(x)$ ìîæíî ïîëó÷èòü ïî÷ëåííûì èíòåãðèðîâàíèåì ðÿäà Òåéëîðà ôóíêöèè $\varphi(x)/\varphi(t)$ âî íóëå. Äëÿ îñòàòêà $\overline{R}_n$ ðÿäà (3) ñïðàâåäëèâû îöåíêè

$$t_n\, exp\left(\frac{x^2}{2n+6}\right) \le \overline{R}_n \le t_n\, exp\left(x^2\right),$$

ïîýòîìó óîöåíêà Φ_n îøèáêè îãðàíè÷åíèÿ äëÿ $\Phi(x)$ óäîâëåòâîðÿåò íåðàâåíñòâó

(4) $$t_n\, exp\left(\frac{-x^2(n+2)}{2n+6}\right) \le \Phi_n \le t_n.$$

Íåðàâåíñòâà (2) è (4) ïîêàçûâàþò, ÷òî ñêîðîñòü ñõîäèìîñòè ðàçëîæåíèé (1) è (3) ïàäàåò ñ ðîñòîì x.

<u>Àëãîðèòì T.</u> Ýòîò àëãîðèòì îñíîâàí íà ðàçëîæåíèè (3). Â ðàáîòàõ [1, 11] â àíàëîãè÷íîì àëãîðèòìå íà øàãå T1 ïðîèçâîäèòñÿ ïðèñâîåíèå $t = sum = |x|\times exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$ ñ î÷åâèäíûì èçìåíåíèåì øàãà T4. Òàê êàê, îäíàêî, øàã T3 òàì íå èçìåíåí, óñëîâèåì îñòàíîâà îêàçûâàåòñÿ $|s_{n+1} - s_n| < \varepsilon \times exp(x^2/2)/\sqrt{2\pi}$, ÷òî, ñîãëàñíî (4), íå ãàðàíòèðóåò íåîáõîäèìóþ òî÷íîñòü âû÷èñëåíèÿ $\Phi(x)$. Òåì íå ìåíåå, åñëè âû÷èñëåíèå $\Phi(x)$ ïðîèçâîäèòñÿ ñ ìàøèííîé òî÷íîñòüþ (è ìàøèííûé íóëü äîñòàòî÷íî ìàë) è îøèáêà ïðè âû÷èñëåíèè ýêñïîíåíòû íå ñëèøêîì âåëèêà, àëãîðèòìû â [1, 11] äàþò â ïðåäåëàõ ïðåäñòàâëåíèÿ ÷èñåë ñ ïëàâàþùåé çàïÿòîé ïðàâèëüíûé ðåçóëüòàò.

```
T1. Ïîëîæèòü t = sum = |x|; x2 = x*x; n = 3.
T2. Ïîëîæèòü t = x2*t/n; s = sum; sum = s+t; n = n+2.
T3. Åñëè |sum - s| > ε, ïåðåéòè ê T2.
T4. Ïîëîæèòü Φ = 0.5 + sign(x)*sum*exp(-x2/2)/√2π.
```

Âîò åùå îäíî ðàçëîæåíèå ôóíêöèè $\overline{R}(x)$, êîòîðîå ìîæíî ïðèìåíÿòü äëÿ âû÷èñëåíèÿ $\Phi(x)$ ïðè íåáîëüøèõ x:

(5) $$\overline{R}(x) = \frac{x|}{|1} - \frac{x^2|}{|3} + \frac{2x^2|}{|5} - \frac{3x^2|}{|7} + \frac{4x^2|}{|9} - \ldots$$

Ýòó öåïíóþ äðîáü ìîæíî ïîëó÷èòü ðàçíûìè ñïîñîáàìè (ñì., íàïðèìåð, [2,3]). ×ëåíû åå çâåíüåâ àëüòåðíèðóþò è ïîòîìó õàðàêòåð ñõîäèìîñòè åå ïîäõîäÿùèõ äðîáåé äîâîëüíî ñëîæåí. Îäíàêî, äëÿ ïîäïîñëåäîâàòåëüíîñòè ïîäõîäÿùèõ äðîáåé ñ ÷åòíûìè íîìåðàìè ìîæíî ïîêàçàòü, ÷òî åå ÷åòíûå ÷ëåíû ñõîäÿòñÿ ê $\overline{R}(x)$ ìîíîòîííî âîçðàñòàÿ, à íå÷åòíûå – ìîíîòîííî óáûâàÿ. Ïîýòîìó ìîäóëü ðàçíîñòè $|w_{2n-2}-w_{2n}|$ äâóõ ñîñåäíèõ ïîäõîäÿùèõ äðîáåé ýòîé ïîäïîñëåäîâàòåëüíîñòè îöåíèâàåò ñâåðõó óêëîíåíèå êàæäîé èç íèõ îò $\overline{R}(x)$.

<u>Àëãîðèòì S.</u> Â äàííîì àëãîðèòìå, îñíîâàííîì íà ðàçëîæåíèè (5), äëÿ ïîëó÷åíèÿ ïîäïîñëåäîâàòåëüíîñòè ïîäõîäÿùèõ äðîáåé ñ ÷åòíûìè íîìåðàìè ìû ïðîèçâîäèì íà êàæäîì âèòêå öèêëà âû÷èñëåíèå äâóõ î÷åðåäíûõ ïîäõîäÿùèõ äðîáåé; ñîîòâåòñòâóþùåå ðåêóðñèâíîå ñîîòíîøåíèå äëÿ ñæàòîé äðîáè ñëèøêîì ñëîæíî è ïîòîìó íå èñïîëüçîâàíî.

```
S1. Ïîëîæèòü x2 = x*x;
S2. /* Âû÷èñëåíèå ïîäõîäÿùèõ äðîáåé ñ íîìåðàìè 0 è 2:
            ïðåäïåðâîå ñîñòîÿíèå öèêëà                         */
       rho = 1/(3-x2); sum = |x|*rho;
       term = x2*sum; rho=3*rho; s = sum = 3*sum; n = 1;
S3. /* Âû÷èñëåíèå ÷åòíîé (êîãäà x2 < 0)
            èëè íå÷åòíîé (x2 > 0) ïîäõîäÿùåé äðîáè         */
     Ïîëîæèòü n = n+1; r = x2*m/(4*n*n-1); rho=1/(1+r*rho);
            term=(rho-1)*term; t = s; s=sum; sum=sum+term;
            x2=-x2;
S4. Åñëè x2 < 0 (ò.å. íà øàãå S3 âû÷èñëÿëàñü íå÷åòíàÿ ïîäõîäÿùàÿ äðîáü),
    òî ïåðåéòè ê øàãó S3.
S5. /* Ïðîâåðêà òî÷íîñòè */ Åñëè |s-t| > ε èëè|s-sum| > ε, ïåðåéòè ê S3.
S6. Ïîëîæèòü Φ = 0.5 + sign(x)*sum*exp(-x2/2)/√2π;
     íà ýòîì ðàáîòà àëãîðèòìà çàêàí÷èâàåòñÿ.
```

Ñîîòíîøåíèÿ [13]

(6') $$w_{n-1}-w_n = (-1)^n(4n-1)(2n-2)!\, x^{4n-1}/(q_{2n-2}q_{2n}),$$

(6'') $$q_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)t^{2n}(t^2-x^2)^2\,dt$$

ïîêàçûâàþò, ÷òî íåîáõîäèìîå ÷èñëî ïîäõîäÿùèõ äðîáåé ðàñòåò ñ ðîñòîì x. Ïîýòîìó ðàçëîæåíèå ñëåäóåò ïðèìåíÿòü ëèøü ïðè íåáîëüøèõ çíà÷åíèÿõ x; ñàì Ë.Øåíòîí [13] ðåêîìåíäóåò ïðèìåíÿòü åãî òîëüêî ïðè $x<\sqrt{3}$.

Äî ñèõ ïîð ìû èìåëè äåëî ñ ðàçëîæåíèÿìè, «êà÷åñòâî» êîòîðûõ óõóäøàëîñü ñ ðîñòîì x. Ðàññìîòðèì òåïåðü ñîîòíîøåíèÿ, êîòîðûå ñ ðîñòîì x ïîçâîëÿþò âû÷èñëÿòü $\Phi(x)$ âñå áûñòðåå:

(7') $$\Phi(x) = 0.5+\varphi(x)R(x),$$

(7'') $$R(x) = \int_x^{\infty}\varphi(t)dt\Big/\varphi(x) = \frac{1|}{|x}+\frac{1|}{|x}+\frac{2|}{|x}+\frac{3|}{|x}+\ldots$$

Ôóíêöèÿ R(x) íàçûâàåòñÿ *îòíîøåíèåì Ìèëëñà*. Ðàçëîæåíèå â öåïíóþ äðîáü äëÿ íåãî áûëî ïðåäëîæåíî åùå Ëàïëàñîì â 1805 ã. ×ëåíû çâåíüåâ ýòîé öåïíîé äðîáè ïðè x > 0 ïîëîæèòåëüíû è ïîòîìó (ñì., íàïðèìåð, [6]) ïîäõîäÿùèå äðîáè ñ ÷åòíûìè íîìåðàìè ñõîäÿòñÿ ê R(x) ìîíîòîííî âîçðàñòàÿ, à ñ íå÷åòíûìè – ìîíîòîííî óáûâàÿ. Ïîýòîìó ìîäóëü ðàçíîñòè $\left|w_{n+1}-w_n\right|$ äâóõ ñîñåäíèõ ïîäõîäÿùèõ äðîáåé ýòîé ïîäïîñëåäîâàòåëüíîñòè îöåíèâàåò ñâåðõó óêëîíåíèå êàæäîé èç íèõ îò R(x). Ìîæíî ïîêàçàòü, ÷òî èìååò ìåñòî îöåíêà

(8) $$\left|w_{n+1} - w_n\right| \le \frac{n!}{x\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 + k\right)},$$

èç êîòîðîé ñëåäóåò, ÷òî ñêîðîñòü ñõîäèìîñòè ðàçëîæåíèÿ ðàñòåò ñ ðîñòîì x.

<u>Àëãîðèòì L.</u> Â ýòîì àëãîðèòìå $\Phi(x)$ âû÷èñëÿåòñÿ ñ ïîìîùüþ ðàçëîæåíèÿ îòíîøåíèÿ Ìèëëñà R(x) â öåïíóþ äðîáü Ëàïëàñà (7).

```
L1. Ïîëîæèòü x2=x*x; y=exp(-x2/2)/√2π; x2=1/x2;
        sum=term=y/|x|; r=s=0; rho=1.
L2. /* Âû÷èñëåíèå î÷åðåäíîé ïîäõîäÿùåé äðîáè   */
     Ïîëîæèòü r=r+x2; rho=1/(1+r*rho); term=(rho-1)*term;
          t=s; s=sum; sum=sum+term.
L3. /* Ïðîâåðêà òî÷íîñòè */ Åñëè |s-t| > ε èëè |s-sum| > ε, ïåðåéòè ê L2.
L4. Åñëè x > 0, ïîëîæèòü F  = 1-sum è îñòàíîâèòü àëãîðèòì.
L5. Ïîëîæèòü F  = sum.
```

Äëÿ âû÷èñëåíèÿ $\Phi(x)$ ïðè áîëüøèõ x èñïîëüçóþ òàêæå àñèìïòîòè÷åñêèé ðÿä

(9) $$R(x) = \sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{x^{2n+1}},$$

êîòîðûé ëåãêî ïîëó÷èòü, ïðîèíòåãðèðîâàâ îòíîøåíèå Ìèëëñà R(x) ïî ÷àñòÿì. Ïî çàäàííîìó ε ìîæíî íàéòè x_ε, òàêîé, ÷òî ïðè $x \ge x_\varepsilon$, ðÿä (9) ïîçâîëÿåò âû÷èñëÿòü $\Phi(x)$ ñ òî÷íîñòüþ ε. Îäíàêî, ñ ïîìîùüþ ýòîãî ðÿäà íåâîçìîæíî, âîîáùå ãîâîðÿ, äîñòè÷ü âëþáîé çàäàííîé òî÷íîñòè, ïîýòîìó ìû è íå èññëåäóåì àëãîðèòì, îñíîâàííûé íà ýòîì ðàçëîæåíèè.

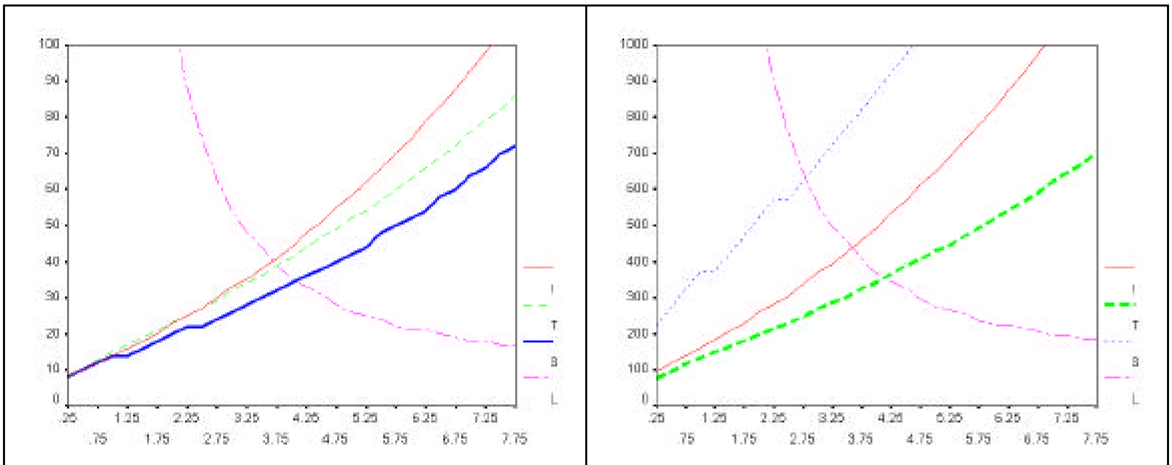
Äëÿ ïðîâåäåíèÿ ÷èñëåííûõ ýêñïåðèìåíòîâ àëãîðèòìû **I**, **T**, **S** è **L** áûëè ðåàëèçîâàíû íà Ñè. Â íèæåñëåäóþùåé òàáëèöå äëÿ êàæäîãî àëãîðèòìà â ñòîëáöå N ïðèâîäèòñÿ êîëè÷åñòâî "âèòêîâ" öèêëà, ïîòðåáîâàâøèõñÿ äëÿ âû÷èñëåíèÿ çíà÷åíèÿ ñ ε = 0 äëÿ íåñêîëüêèõ x; ïîñêîëüêó âñå àëãîðèòìû äàëè îäèíàêîâûå 8 çíàêîâ ïîñëå çàïÿòîé, ñàìè âû÷èñëåííûå çíà÷åíèÿ îïóùåíû. Â ñòîëáöå O ïðèâîäèòñÿ ÷èñëî ïîòðåáîâàâøèõñÿ îïåðàöèé. Äëÿ àëãîðèòìà **I** îíî âû÷èñëÿëîñü ïî ôîðìóëå 8+11×N, äëÿ àëãîðèòìà **T** – ïî ôîðìóëå 14+8×N, äëÿ **S** – ïî ôîðìóëå 23+25×N, íàêîíåö, äëÿ **L** – ïî ôîðìóëå 16+10×N. Îáðàòèòå âíèìàíèå – âñåì îïåðàöèÿì, â òîì ÷èñëå, òàêèì, êàê âûçîâ ôóíêöèè `fabs` èëè `exp`, ïðèäàåòñÿ ðàâíûé âåñ. Äëÿ èëëþñòðàòèâíûõ öåëåé òàêàÿ òî÷íîñòü ïðèçíàíà äîñòàòî÷íîé.

x	**I**		**T**		**S**		**L**	
	N	O	N	O	N	O	N	O

x	I		T		S		L	
0.25	8	96	8	78	8	223	6027	60286
0.50	10	118	10	94	10	273	1507	15086
0.75	12	140	13	118	12	323	694	6956
1.00	14	162	15	134	14	373	391	3926
1.25	16	184	17	150	14	373	259	2606
1.50	18	206	19	166	16	423	180	1816
1.75	20	228	21	182	18	473	137	1386
2.00	23	261	23	198	20	523	108	1096
2.25	25	283	25	214	22	573	88	896
2.50	27	305	27	230	22	573	74	756
2.75	30	338	29	246	24	623	63	646
3.00	33	371	32	270	26	673	54	556
3.25	35	393	34	286	28	723	48	496
3.50	38	426	36	302	30	773	44	456
3.75	41	459	39	326	32	823	39	406
4.00	44	492	41	342	34	873	35	366
4.25	48	536	44	366	36	923	33	346
4.50	51	569	47	390	38	973	31	326
4.75	55	613	49	406	40	1023	28	296
5.00	58	646	52	430	42	1073	26	276
5.25	62	690	54	446	44	1123	25	266
5.50	66	734	57	470	48	1223	24	256
5.75	70	778	60	494	50	1273	22	236
6.00	74	822	63	518	52	1323	21	226
6.25	79	877	66	542	54	1373	21	226
6.50	83	921	69	566	58	1473	20	216

x	I		T		S		L	
6.75	88	976	72	590	60	1523	19	206
7.00	93	1031	76	622	64	1623	18	196
7.25	98	1086	79	646	66	1673	18	196
7.50	103	1141	82	670	70	1773	17	186
7.75	108	1196	86	702	72	1823	17	186

Ï î ñòðî èì ãðàôèêè, î òðàæàþ ù èå äàí í û å èç ýòîé òàáëèöû , – èõ ï ðî ù å àí àëèçèðî âàòü. Í à í èæåñëåäóþ ù èõ ðèñóí êàõ ñëåâà – ñòî ëáöû N, ñï ðàâà – O.



à) ÷èñëî âèòêî â öèêëà

á) êî ëè÷åñòâî î ï åðàöèé

Ì û âèäèì , ÷òî ïî ÷èñëó N âèòêî â öèêëà àëãî ðèòì û ï ðè í å ñëèø êî ì áî ëüø èõ x ï ðàêòè÷åñêè í å ðàçëè÷àþ òñÿ äî x, ï ðèì åðí î ðàâí ûõ 3.5, ïî ñëå ÷åãî ëèäèðóåò àëãî ðèòì **S**. Í à÷èí àÿ ñ x, ï ðèì åðí î ðàâí ûõ 4, áåññï î ðí ûì ëèäåðî ì ñòàí î âèòñÿ àëãî ðèòì **L**. Ï î ÷èñëó î ï åðàöèé, êî í å÷í î , áî ëåå âàæí î é õàðàêòåðèñòèêå, ï ðè x äî 4 ëèäåðî ì ÿâëÿåòñÿ àëãî ðèòì **T**, ï î ñëå – ñí î âà àëãî ðèòì **L**.

Ï î ì èì î ï ðåâî ñõî äñòâà â ñêî ðî ñòè àëãî ðèòì **T** âû ãî äí î î òëè÷àåòñÿ î ò **I** è **S** óñòî é÷èâî ñòüþ ïî î òí î ø åí èþ ê í àêî ï ëåí èþ î ø èáêè. Äëÿ äî êàçàòåëüñòâà âûñêàæåì í î âî óòâåðæäåí èÿ î öåí èì ðàñï ðî ñòðàí ÿåì óþ î ø èáêó î êðóãëåí èÿ.

Ï óñòü $\sigma_n^{(i)}$ – î òí î ñèòåëüí àÿ î ø èáêà n-é ÷àñòè÷í î é ñóì ì û â àëãî ðèòì å **I**, à $\tau_n^{(i)}$ – î òí î ñèòåëüí àÿ î ø èáêà t_n. Äëÿ ï ðî ñòî òû ï ðåäï î ëàãàåì , ÷òî ï ðåäñòàâëåí èå öåëûõ ÷èñåë è äåéñòâèÿ í àä í èì è î ñóù åñòâëÿþ òñÿ áåç î ø èáî ê, à î ø èáêè î êðóãëåí èÿ âñåõ àðèôì åòè÷åñêèõ î ï åðàöèé í àä äåéñòâèòåëüí û ì è ÷èñëàì è í å ï ðåâî ñõî äÿò r. Òî ãäà äëÿ $\sigma_n^{(i)}$ èì ååì ñëåäóþ ù åå ñî î òí î ø åí èå

(10) $$\sigma_{n+1}^{(i)} = \frac{s_n}{s_n + t_{n+1}}\sigma_n^{(i)} + \frac{t_n}{s_n + t_{n+1}}\tau_n^{(i)} + r ,$$

ïðè÷åì

(11) $$\tau_{n+1}^{(i)} = \tau_n^{(i)} + \chi_{x^2} + 3r ,$$

ãäå χ_{x^2} – îòíîñèòåëüíàÿ îøèáêà ïðåäñòàâëåíèÿ x^2. Áóäåì ñ÷èòàòü òàêæå, ÷òî

$$\sigma_n^{(i)} \le r ,\ \tau_n^{(i)} \le r ,\ \chi_{x^2} \le r .$$

Èç (11) ñ ëåãêîñòüþ ñëåäóåò

$$\tau_n^{(i)} \le \chi_{x^2} + 4nr \le (4n+1)r ,$$

à èç (10) ïîëó÷àåì

$$\sigma_{n+1}^{(i)} \le \sigma_n^{(i)} + \tau_{n+1}^{(i)} + r ,$$

îòêóäà

(12) $$\sigma_n^{(i)} \le r\left(2n^2 + 4n + 1\right).$$

Âåðõíÿÿ îöåíêà îøèáêè (12) ðàñòåò ñ ïóãàþùåé ñêîðîñòüþ: òàê, åñëè $r=10^{-10}$, òî $\sigma_{10}^{(i)} \le 0.24\times10^{-7}$, à $\sigma_{20}^{(i)} \le 0.88\times10^{-7}$. Ïðè ýòîì ñëåäóåò ó÷åñòü, ÷òî ïðè âûâîäå ìû èãíîðèðîâàëè çíàêîïåðåìåííîñòü ðÿäà (1), à ýòî ñèëüíî ñìÿã÷àåò ãðóáîñòü îöåíêè (12).

Äëÿ àëãîðèòìà **T** îòíîñèòåëüíàÿ îøèáêà $\sigma_n^{(t)}$ ÷àñòè÷íîé ñóììû s_n òàêæå óäîâëåòâîðÿåò ñîîòíîøåíèþ (10), îäíàêî òåïåðü $\tau_{n+1}^{(t)} = \tau_n^{(t)} + \chi_{x^2} + r$. Äåéñòâóÿ, êàê ðàíüøå, ïîëó÷àåì îöåíêó

(13) $$\sigma_n^{(t)} \le r\left(n^2 + 7n + 1\right).$$

Ýòà îöåíêà âîçðàñòàåò ëèøü íåìíîãî ìåäëåííåå, ÷åì îöåíêà (12), Îäíàêî, ÷ëåíû ðÿäà (6) ïîëîæèòåëüíû, ïîýòîìó èñòèííàÿ îòíîñèòåëüíàÿ îøèáêà çíà÷èòåëüíî ìåíüøå ïîëó÷åííîé îöåíêè (13). Õîòÿ îáùèé ÷ëåí ðÿäà (2) óáûâàåò áûñòðåå, ÷åì îáùèé ÷ëåí ðÿäà (3), ìàøèííûå ýêñïåðèìåíòû ïîêàçûâàþò, ÷òî ÷èñëî èñïîëíåíèé øàãà T2 ìåíüøå ÷èñëà «âèòêîâ öèêëà» â àëãîðèòìå **I**; ýòî òàêæå ïðèâîäèò ê ìåíüøåé ðàñïðîñòðàíÿåìîé îøèáêå. Îäíàêî, íà òî÷íîñòü âû÷èñëåíèÿ $\Phi(x)$ ñèëüíî âëèÿåò òî÷íîñòü âû÷èñëåíèÿ $\exp(-x^2/2)$: âîçíèêàþùàÿ çäåñü îøèáêà ìîæåò «ñúåñòü» âñå ïðåèìóùåñòâà ðàçëîæåíèÿ (3).

Ïîëó÷åííûå äàííûå ïîçâîëÿþò ðåêîìåíäîâàòü äëÿ âû÷èñëåíèÿ $\Phi(x)$ ñ ïðîèçâîëüíîé òî÷íîñòüþ ñî÷åòàíèå àëãîðèòìîâ **T** è **L**. Íóæíî òîëüêî âûáðàòü òî÷êó p, ðàçäåëÿþùóþ îáëàñòè äåéñòâèÿ ýòèõ àëãîðèòìîâ.

Èòàê, ïðè âîçðàñòàþùèõ x âðåìÿ ñ÷åòà ïî àëãîðèòìó **T** âîçðàñòàåò, à ïî àëãîðèòìó **L** óáûâàåò. Ïîýòîìó â êà÷åñòâå p ñëåäîâàëî áû âûáèðàòü òî÷êó, â êîòîðîé ýòè âðåìåíà ñòàíîâÿòñÿ ðàâíûìè. Ê ñîæàëåíèþ òàêàÿ òî÷êà çàâèñèò îò òî÷íîñòè ñ÷åòà ε, îò ðàçðÿäíîñòè èñïîëüçóåìîãî êîìïüþòåðà, îò åãî ñêîðîñòè. Ïîýòîìó âûáðàòü «íàâåêè îïòèìàëüíóþ» òî÷êó p íå óäàñòñÿ; ÿ ðåêîìåíäóþ âûáèðàòü åå ïðè ε, ðàâíîì ìàøèííîìó íóëþ.

Àëãîðèòìû ñ êîíå÷íîé òî÷íîñòüþ

Ðàçëîæåíèÿ, àïïðîêñèìèðóþùèå çàäàííóþ ôóíêöèþ ñ íåêîòîðîé àïðèîðè ôèêñèðîâàííîé òî÷íîñòüþ, ìîæíî ïîëó÷àòü ìíîæåñòâîì ñàìûõ ðàçíûõ ñïîñîáîâ. Äëÿ ïîëó÷åíèÿ ïîëèíîìèàëüíûõ ïðèáëèæåíèé, íàïðèìåð, îäíèì èç ñàìûõ ïðîñòûõ è ìîùíûõ ÿâëÿåòñÿ, íà ìîé âçãëÿä, ïðèíàäëåæàùèé Ëàíöîøó [5] ïðîöåññ *ýêîíîìèçàöèè* ñòåïåííûõ ðÿäîâ. Íåêîòîðûå ñïîñîáû ïîëó÷åíèÿ ðàöèîíàëüíûõ ïðèáëèæåíèé îïèñàíû â ðàáîòàõ [3, 6]; ñïèñîê ëèòåðàòóðû, ïîñâÿùåííîé ýòîé ïðîáëåìàòèêå, ëåãêî ìîæåò áûòü ïðîäîëæåí.

Â äàííîì ïàðàãðàôå ÿ ïðèâîæó íåñêîëüêî òàêèõ øèðîêî èçâåñòíûõ ðàçëîæåíèé [10]. Ðàçëîæåíèÿ ïîëó÷åíû ñ ïîìîùüþ «ãðóáîé ñèëû»: ôèêñèðîâàâ âèä àïïðîêñèìàöèè, ïîëó÷àåì âîçìîæíîñòü îöåíèâàòü çíà÷åíèÿ êîíñòàíò ïî çíà÷åíèÿì ôóíêöèè â íåñêîëüêèõ òî÷êàõ. Òî÷íîñòü ïîëó÷åííîé àïïðîêñèìàöèè îöåíèâàåòñÿ ñðàâíåíèåì èñòèííûõ çíà÷åíèé $\Phi(x_i)$ è àïïðîêñèìèðóþùèõ $\Phi^*(x_i)$ âî ìíîãèõ òî÷êàõ. Óñïåõ âñåãî ïðåäïðèÿòèÿ îïðåäåëÿåòñÿ, êîíå÷íî, íàøåé óäà÷ëèâîñòüþ â âûáîðå âèäà àïïðîêñèìàöèè.

Âîò, íàïðèìåð, êàê ìîæíî ïîëó÷èòü ðàçëîæåíèå A2. Íà÷íåì ñ òîãî, ÷òî ôèêñèðóåì âèä àïïðîêñèìàöèè

$$\Phi^*(x) = 1 - \left[\frac{a_1}{1+px} + \frac{a_2}{(1+px)^2} + \frac{a_3}{(1+px)^3}\right]\Phi'(x) \tag{1}$$

Ïåðåïèøåì (1) â áîëåå óäîáíîì âèäå

$$\Phi^*(x) = 1 - \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2}{(1+px)^3}\exp\left(-x^2/2\right) \tag{2}$$

è ïîëîæèì

$$y(x) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-t^2/2\right)dt\right]\exp\left(-x^2/2\right) \tag{3}$$

Âû÷èñëèâ y(x) â òî÷êàõ x_0, x_1, x_2, x_3, ïîëó÷àåì ÷åòûðå íåëèíåéíûõ óðàâíåíèÿ äëÿ îïðåäåëåíèÿ êîíñòàíò c_0, c_1, c_2, c_3, p:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 = (1+px_0)^3 y(x_0) \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 = (1+px_1)^3 y(x_1) \\ c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 = (1+px_2)^3 y(x_2) \\ c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 = (1+px_3)^3 y(x_3) \end{cases} \tag{4}$$

Ïîëó÷åííàÿ ñèñòåìà óðàâíåíèé ñîâìåñòíà îòíîñèòåëüíî íåèçâåñòíûõ c_0, c_1, c_2, c_3 (êîíñòàíòó p ïîêà ñ÷èòàåì èçâåñòíîé) òîãäà è òîëüêî òîãäà, êîãäà äåòåðìèíàíò

$$
f(p) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & (1+px_0)^3 y(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & (1+px_1)^3 y(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & (1+px_2)^3 y(x_2) \\ 1 & x_3 & x_3^2 & (1+px_3)^3 y(x_3) \end{vmatrix}
$$

ðàâåí íóëþ. Ðàçëîæèâ ýòîò îïðåäåëèòåëü ïî ýëåìåíòàì ïåðâîãî ñòîëáöà, ïîëó÷àåì óðàâíåíèå

(5) $$f(p) = A_0(1+px_0)^3 + A_1(1+px_1)^3 + A_2(1+px_2)^3 + A_3(1+px_3)^3 = 0,$$

â êîòîðîì A_0, A_1, A_2 è A_3 èçâåñòíû. Äëÿ îïðåäåëåíèÿ êîðíåé ýòîãî óðàâíåíèÿ èñïîëüçóåòñÿ êàêàÿ-íèáóäü ñòàíäàðòíàÿ ïðîöåäóðà, íàïðèìåð, ìåòîä Íüþòîíà. Â ðàáîòå [10] îïèñàíû ïðè÷èíû, ïî êîòîðûì â êà÷åñòâå p ñëåäóåò âûáèðàòü íàèìåíüøèé äåéñòâèòåëüíûé êîðåíü óðàâíåíèÿ (5).

Îòáðàñûâàÿ òåïåðü ëþáîå (íàïðèìåð, ïîñëåäíåå) óðàâíåíèå â ñèñòåìå (4), ïîëó÷àåì ëèíåéíóþ ñèñòåìó

$$
\begin{cases} c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 = (1+px_0)^3 y(x_0) \\ c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 = (1+px_1)^3 y(x_1) \\ c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2 = (1+px_2)^3 y(x_2) \end{cases} ,
$$

ðåøèâ êîòîðóþ, ïîëó÷àåì òðåáóåìûå çíà÷åíèÿ êîíñòàíò. Ïåðåõîä îò ðàçëîæåíèÿ âèäà (2) ê ðàçëîæåíèþ A2 òðèâèàëåí.

Àëãîðèòìû, ðåàëèçóþùèå ðàçëîæåíèÿ A1-A4, ïðèâåäåíû â ïðèëîæåíèè B; âî âñåõ ýòèõ àëãîðèòìàõ äëÿ âû÷èñëåíèÿ ïîëèíîìîâ èñïîëüçîâàíà ñõåìà Ãîðíåðà.

A1: $\Phi(x) = 1 - (1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)^{-4}/2 + \varepsilon(x)$,

$|\varepsilon(x)| < 2.5\times10^{-4}$, $0 \le x < z_1 = 3.72$

$a_1 = 0.196854$, $a_3 = 0.000344$,

$a_2 = 0.115194$, $a_4 = 0.019527$;

$\Phi(x) = 1$ ïðè $x \ge z_1$.

A2: $\Phi(x) = 1 - \varphi(x)\,(b_1t + b_2t^2 + b_3t^3) + \varepsilon(x)$,

$|\varepsilon(x)| < 10^{-5}$, $0 \le x < z_2 = 4.27$

$b_1 = 0.4361836$, $b_2 = -0.1201676$, $b_3 = 0.937298$;

$\Phi(x) = 1$ ïðè $x \ge z_2$.

A3: $\Phi(x) = 1 - (1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_4x^5 + c_4x^6)^{-16}/2 + \varepsilon(x)$,

$|\varepsilon(x)| < 1.5?10^{-7}$, $0 \le x < z_3 = 5.4$

$c_1 = 0.0498674370$, $c_4 = 0.0000380036$,

$c_2 = 0.0211410061$, $c_5 = 0.0000488906$,

$c_3 = 0.0032776263$, $c_6 = 0.0000053830$;

$\Phi(x) = 1$ ïðè $x \ge z_3$.

A4: $\Phi(x) = 1 - \varphi(x)\,(d_1t + d_2t^2 + d_3t^3 + d_4t^4 + d_5t^5) + \varepsilon(x)$,

$|\varepsilon(x)| < 7.5*10^{-8}$, $0 \le x < z_4 = 5.6$,

$d_1 = 0.319381530$, $d_4 = -1.821255978$,

$d_2 = -0.356563782$, $d_5 = 1.330274429$,

$d_3 = 1.781477937$;

$\Phi(x) = 1$ ïðè $x \ge z_4$.

Ïðèâåäó «äî êó÷è» àïïðîêñèìàöèè, ïîçâîëÿþùèå íàõîäèòü êâàíòèëè íîðìàëüíîãî ðàñïðåäåëåíèÿ, ò.å. çíà÷åíèÿ z_q, äëÿ êîòîðûõ $\Phi(z_q) = q$.

Z1: $$z_q = t - \frac{a_0 + a_1t}{1 + b_1t + b_2t^2} + \varepsilon(q),$$

$|\varepsilon(x)| < 3*10^{-3}$, $0 \le q < 0.5$,

$a_0 = 2.30753$, $b_1 = 0.99229$,

$a_1 = 0.27061$, $b_2 = 0.04481$.

Z2: $$z_q = t - \frac{c_0 + c_1t + c_2t^2}{1 + d_1t + d_2t^2 + d_3t^3} + \varepsilon(q)$$

$|\varepsilon(x)| < 4.5*10^{-4}$, $0 \le q < 0.5$,

$c_0 = 2.515517$, $d_1 = 1.432788$,

$c_1 = 0.802853$, $d_2 = 0.189269$,

$c_2 = 0.010328$, $d_3 = 0.001308$.

Ïåðâîå èç ýòèõ ðàçëîæåíèé áûëî èñïîëüçîâàíî â A-àëãîðèòìàõ äëÿ îöåíêè òîãî x_ε, ïîñëå êîòîðîãî ìîæíî ñ÷èòàòü, ÷òî $\Phi(x) = 1$.

Äëÿ âû÷èñëåíèÿ $\Phi(x)$ ñ çàðàíåå ôèêñèðîâàííîé òî÷íîñòüþ ëåãêî ïðèäóìàòü è äðóãèå àëãîðèòìû; íàïðèìåð, ìîæíî ïîïðîñòó ïîñ÷èòàòü èíòåãðàë – ñêàæåì, ïî ôîðìóëå Ñèìïñîíà. Çäåñü ïðèâåäåíû íàèáîëåå ýêîíîìíûå èç âñåõ èçâåñòíûõ ìíå ñïîñîáîâ.

Åùå àëãîðèòìû

Ãîâîðÿ â §1, ÷òî îïèñàííûå òàì ðàçëîæåíèÿ ïîçâîëÿþò, â ïðèíöèïå, âû÷èñëÿòü $\Phi(x)$ ñ ïðîèçâîëüíîé òî÷íîñòüþ, ÿ óìîë÷àë î òîì, ÷òî òî÷íîñòü âû÷èñëåíèé îãðàíè÷èâàåòñÿ íå òîëüêî îøèáêîé, ðàñïðîñòðàíÿåìîé ïðè âûïîëíåíèè àðèôìåòè÷åñêèõ îïåðàöèé âî âðåìÿ ñóììèðîâàíèÿ ðÿäîâ è öåïíûõ äðîáåé, íî è òî÷íîñòüþ (÷èñëîì âåðíûõ çíàêîâ), ñ êîòîðîé çàäàåòñÿ êîíñòàíòà $1/\sqrt{2\pi}$, à òàêæå îøèáêîé, âîçíèêàþùåé ïðè âû÷èñëåíèè ýêñïîíåíòû. Â ÷àñòíîñòè, êîíñòàíòó, âîçìîæíî, ïðèäåòñÿ çàìåíèòü ïðè ïåðåõîäå ñ îäíîé ïëàòôîðìû íà äðóãóþ.

Îäíàêî, ðàç óæ «÷èñòîòó» àëãîðèòìîâ ñîáëþñòè íå óäàëîñü, íàøå ïàäåíèå óñóãóáèòñÿ íå ñëèøêîì ñèëüíî, åñëè ìû ïîçâîëèì ñåáå èñïîëüçîâàòü åùå íåñêîëüêî êîíñòàíò. Ïðè ýòîì ìû îñíîâûâàåìñÿ íà ñëåäóþùåì ïðîñòîì ðàññóæäåíèè.

Ñêîðîñòü ñõîäèìîñòè ðÿäà Òåéëîðà, ÿâëÿþùàÿñÿ îäíèì èç ãëàâíåéøèõ ïîêàçàòåëåé êà÷åñòâà ïîäîáíûõ àëãîðèòìîâ, òåì íèæå, ÷åì áîëåå óäàëåíà òî÷êà, â êîòîðîé ìû âû÷èñëÿåì ôóíêöèþ, îò òî÷êè, â êîòîðîé ýòà ôóíêöèÿ áûëà ðàçëîæåíà â ðÿä. Ïîýòîìó ñëåäóåò çàïàñòè íåñêîëüêî ðàçëîæåíèé â ðàçíûõ òî÷êàõ ñ òåì, ÷òîáû äëÿ êàæäîé òî÷êè èìåòü âîçìîæíîñòü âûáðàòü èç íèõ íàèëó÷øåå.

Äëÿ ðåàëèçàöèè ýòîãî ñîîáðàæåíèÿ íóæíî óìåòü ðàñêëàäûâàòü â ïðîèçâîëüíîé òî÷êå â ðÿä Òåéëîðà ñàìó $\Phi(x)$ èëè ïðîñòî ñâÿçàííóþ ñ íåé ôóíêöèþ. Ýòèì ìû ñåé÷àñ è çàéìåìñÿ.

Ëåãêî ïðîâåðèòü, ÷òî $\Phi(x)$ óäîâëåòâîðÿåò ñîîòíîøåíèþ

(1) $$\Phi''(x) = -x\Phi'(x).$$

Ðàçëîæèì $\Phi(x)$ â ðÿä Òåéëîðà â òî÷êå y:

(2) $$\Phi(x) = \sum_{n \ge 0} h_n(y)(x - y)^n .$$

Ïîëîæèì $g_n = h_n n!$; èç (1)-(2) ñëåäóåò, ÷òî óäîâëåòâîðÿþò ñëåäóþùåìó ñîîòíîøåíèþ

(3) $$g_{n+2} = -yg_{n+1} - yg_n,\ n \ge 0;\ g_0 = \Phi(x),\ g_0 = \varphi(y).$$

Îáðàòèòå âíèìàíèå: ïðè $y = 0$ ñîîòíîøåíèÿ (2)-(3) çàäàþò ðÿä (1.1).

Åùå ðàçëîæåíèå äëÿ âû÷èñëåíèÿ $\Phi(x)$ ìîæíî ïîëó÷èòü, èñõîäÿ èç óðàâíåíèÿ

(4) $$\overline{R}'(x) = 1 - x\overline{R}(x)$$

.Èç (4) ëåãêî ïî ëó÷èòü ðåêóðñèâí û å ñî î òí î ø åí èÿ äëÿ êî ýô ô èöèåí òî â $c_n(y)$ ðàçëî æåí èÿ Òåéëî ðà â òî ÷êå y:

(5) $$(n+2)c_{n+2} = yc_n + 1 + c_n,\ n \ge 0;\ c_0 = \overline{R}(x),\ c_1 = 1 + c_0 y.$$

Î áðàòèòå âí èì àí èå: ï ðè $y = 0$ ñî î òí î ø åí èÿ çàäàþ ò ðÿä (1.3).

Ëåãêî óâèäåòü, ÷òî ñ ðî ñòî ì y ñêî ðî ñòü ñõî äèì î ñòè î áî èõ ðàçëî æåí èé äî âî ëüí î áû ñòðî ï àäàåò.

Î ñí î âû âàÿñü í à ýòèõ ðàçëî æåí èÿõ, ì î æí î ï î ñòðî èòü àëãî ðèòì û, êî òî ðû å èñï î ëüçóþ ò âî çì î æí î ñòè ñòàí äàðòí û õ ðÿäî â áî ëåå èçî ù ðåí í î, ÷åì áåñõèòðî ñòí û å àëãî ðèòì û **I** è **T**.

Ï ðåæäå âñåãî, ì î æí î ï î ï ðî ñòó çàï àñòè çí à÷åí èÿ âû ÷èñëÿåì î é ô óí êöèè – $\Phi(x)$ èëè $\overline{R}(x)$ – â í åñêî ëüêèõ òî ÷êàõ $x_1,\dots,x_k$ è, âû áðàâ äëÿ çàäàí í î é òî ÷êè x áëèæàéø óþ èç çàï àñí û õ, èñï î ëüçî âàòü äàëåå ñî î òâåòñòâóþ ù åå ðàçëî æåí èå. Í à ýòî é èäåå î ñí î âàí û àëãî ðèòì û **D** è **P**. Ï ðè ðåàëèçàöèè ýòèõ àëãî ðèòì î â ï ðèõî äèòñÿ äåëàòü âû áî ð ì åæäó ðàñõî äî ì ï àì ÿòè í à õðàí åí èå çí à÷åí èé ô óí êöèè è ÷èñëî ì ñóì ì èðóåì û õ ÷ëåí î â ðÿäà: ÷åì áî ëüø å ðàññòî ÿí èå ì åæäó ñî ñåäí èì è òî ÷êàì è, òåì ì åí üø å ðàñõî ä ï àì ÿòè, í î è òåì ì åäëåí í åå, âî î áù å ãî âî ðÿ, ñõî äèòñÿ ðÿä Òåéëî ðà. Ì î æí î òàêæå ðåø àòü çàäà÷ó ï î èñêà î ï òèì àëüí î ãî ðàñï î ëî æåí èÿ çàï àñàåì û õ òî ÷åê, í î ì û çäåñü í å áóäåì ýòèì çàí èì àòüñÿ.

Àëãî ðèòì D. Ýòî ò àëãî ðèòì âû ÷èñëÿåò çí à÷åí èÿ ô óí êöèè $\Phi(x)$ â òî ÷êàõ î òðåçêà [-a,a]. Ï ðåäï î ëàãàåòñÿ, ÷òî î òðåçî ê [0, a] ðàçáèò í à ï î ðåäåëåí í î å ÷èñëî í åï åðåñåêàþ ù èõñÿ î òðåçêî â ñ öåí òðàì è â x_i è èçâåñòí û çí à÷åí èÿ $\Phi_i = \Phi(x_i)$. ×òî áû âû ÷èñëèòü $\Phi(x)$, àëãî ðèòì âû áèðàåò x_i, äëÿ êî òî ðî ãî ðàññòî ÿí èå $|x-x_i|$ ì èí èì àëüí î; ï î ñëå ýòî ãî èñï î ëüçóåòñÿ ðàçëî æåí èå (2)-(3) ñ $y=x_i$.

```
D1. Ïîëîæèòü  x1 = |x|; i = [x1/h];
           z = i*h; /* i – íîìåð áëèæàéøåé ê x òî÷êè xi, z = xi */
D2. /* Ïîäãîòîâêà ê âû÷èñëåíèþ ðÿäà.   */
     Ïîëîæèòü g0 = t = Fi; g1 = exp(-z*z/2)/√2π;
           xn = x1 = x1-z; sum=t+g1*xn; n = 1;
D3. /* Âû÷èñëåíèå î÷åðåäíîé ÷àñòè÷íîé ñóììû */
           Ïîëîæèòü n = n+1; s=-z*g1-(n-2)*g0; g0=g1; g1 = s; xn=x1*xn/n;
              s=t; t=sum; sum = sum + g1*xn;
D4. /* Ïðîâåðêà òî÷íîñòè */ Åñëè |s-t| > ε èëè |t-sum| > ε, ïåðåéòè ê D3.
D5. Åñëè x > 0 , ïîëîæèòü F  = sum, èíà÷å ïîëîæèòü F  = 1-sum.
     Íà ýòîì ðàáîòà àëãîðèòìà çàêàí÷èâàåòñÿ.
```

Àëãî ðèòì P. Âû ÷èñëåí èÿ çäåñü ï î ëí î ñòüþ àí àëî ãè÷í û òî ì ó, ÷òî äåëàåòñÿ â àëãî ðèòì å **D**. Èñï î ëüçóåòñÿ ðàçëî æåí èå (4)-(5) è, ñî î òâåòñòâåí í î, çàï àñàþ òñÿ çí à÷åí èÿ $\overline{R}(x_i)$.

```
P1. Ïîëîæèòü x1 = |x|.
    Ïîëîæèòü i = [x1/h]; z = i*h (òåïåðü i – íîìåð áëèæàéøåé ê x òî÷êè xi, z =
           xI).
P2. /* Ïîäãîòîâêà ê âû÷èñëåíèþ ðÿäà.   */
     Ïîëîæèòü c0 = s = Ri; c1 = 1+z*c0;
           xn = x1 = x1-z; rz=s+c1*xn; n = 1.
P3. /* Âû÷èñëåíèå î÷åðåäíîé ÷àñòè÷íîé ñóììû */
     Ïîëîæèòü n = n+1; xn = x1*xn; s = (c0+z*c1)/n;
              c0 = c1; c1 = s; s = t; t = rz; rz = t+c1*xn.
P4. /* Ïðîâåðêà òî÷íîñòè */ Åñëè |s-t| > ε èëè |t-rz| > ε, ïåðåéòè ê P3.
```

P5. Ïîëîæèòü 0.5 + sign(x)*rz*exp(-x*x/2)/√2π; íà ýòîì ðàáîòà àëãîðèòìà çàêàí÷è-âàåòñÿ.

Ìîæíî äåéñòâîâàòü è áîëåå èçûñêàííî, ïîäáèðàÿñü ê íóæíîé òî÷êå øàæêàìè îïðåäåëåííîé äëèíû è âû÷èñëÿÿ çíà÷åíèÿ ôóíêöèè â ïðîìåæóòî÷íûõ òî÷êàõ. Íà ýòîì îñíîâàíû àëãîðèòìû **F** è **C**, â êîòîðûõ èñïîëüçóåòñÿ ëèøü òîò ôàêò, ÷òî $\Phi(0)=0.5$, à $\overline{R}(0)=0$.

Àëãîðèòì F. Çäåñü ïîñëåäîâàòåëüíî âû÷èñëÿþòñÿ $\Phi(h)$, $\Phi(2h)$ è ò.ä. äî òåõ ïîð, ïîêà $k\times h \le x$ è òîëüêî ïîñëå ýòîãî âû÷èñëÿåòñÿ $\Phi(x)$. Äåéñòâèÿ àëãîðèòìà íàïîìèíàþò äâèæåíèÿ ãóñåíèöû, êîòîðàÿ ïåðåïîëçàåò èç íóëÿ â h, èç h â 2h è ò.ä. äî òåõ ïîð, ïîêà íå äîïîëçåò äî òî÷êè x.

F1. Ïîëîæèòü x1 = |x|; z = fz = 0.
F2. /* Ïðîâåðêà îêîí÷àíèÿ */ Ïîëîæèòü a=x1-z.
Åñëè a ≤ 0, ïîëîæèòü F = 0.5 + sign(x)*fz.
Íà ýòîì ðàáîòà àëãîðèòìà çàêàí÷èâàåòñÿ.
F3. /* Óñòàíîâ øàãà */ Åñëè a > h, ïîëîæèòü a = h.
F4. /* Ïîäãîòîâêà ê âû÷èñëåíèþ ðÿäà. */
Ïîëîæèòü xn = a; g0 = g1 = exp(-z*z/2)/√2π;
t = sum = g1*xn; n = 1.
F5. /* Âû÷èñëåíèå î÷åðåäíîé ÷àñòè÷íîé ñóììû ðÿäà */
Ïîëîæèòü n=n+1; xn = xn*a/n; s = -z*g1-(n-2)*g0;
g0 = g1; g1 = s; s = t; t = sum; sum = sum+g1*xn.
F6. /* Ïðîâåðêà òî÷íîñòè */ Åñëè |s-t| > ε èëè |t-sum| > ε, ïåðåéòè ê F5.
F7. /* Â ò. z ðàçëîæåíèå ïîñ÷èòàíî. Ïîøëè â ñëåä. òî÷êó */
Ïîëîæèòü fz = fz + sum; z = z + a; ïåðåéòè ê F2.

Àëãîðèòì C. Ýòîò àëãîðèòì, îñíîâàííûé íà ðàçëîæåíèè (4)-(5), ïîëíîñòüþ àíàëîãè÷åí ïðåäûäóùåìó. Çíà÷åíèå áóëåâñêîé ïåðåìåííîé gotta ñòàíîâèòñÿ ðàâíûì true, êîãäà íóæíàÿ òî÷êà x äîñòèãíóòà.

C1. Ïîëîæèòü x1 = |x|; z = Rz = 0; gotta = false.
C2. Ïîëîæèòü xa = z; Ra = Rz; z = z + h.
Åñëè *z ³ x1*, ïîëîæèòü *z = x1; gotta = true*.
C3. /* Ïîäãîòîâêà ê âû÷èñëåíèþ ðÿäà. */
Ïîëîæèòü c0 = t = Ra; c1 = 1 + xa*Ra;
xn = D = z- xa; Rz = Ra + c1*xn; n = 1.
C4. /* Âû÷èñëåíèå î÷åðåäíîé ÷àñòè÷íîé ñóììû ðÿäà */
Ïîëîæèòü n=n+1; xn = D*xn; s = (c0 + xa*c1)/n;
C0 = c1; c1 = s; s = t; t =Rz; Rz = t + c1*xn.
C5. /* Ïðîâåðêà òî÷íîñòè */ Åñëè |*s-t*| > *e* èëè |*t-Rz*| > *e*, ïåðåéòè ê C4.
C6. /* Ïðîâåðêà îêîí÷àíèÿ */ Åñëè *gotta = false*, ïåðåéòè ê C2.
C7. Ïîëîæèòü F = 0.5 + sign(x)*exp(-z*z/2)/√2π;
íà ýòîì ðàáîòà àëãîðèòìà çàêàí÷èâàåòñÿ.

Ìîæíî òàêæå äâèãàòüñÿ èç x â íóëü. Ïðè ýòîì, îäíàêî, óäàåòñÿ èñïîëüçîâàòü òîëüêî ðàçëîæåíèå (2)-(3). Ñîîòâåòñòâóþùèé àëãîðèòì **B** î÷åíü áëèçîê ê àëãîðèòìó 123 [8], â êîòîðîì äëÿ âû÷èñëåíèÿ ôóíêöèè îøèáîê

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

èñïîëüçîâàíî ðàçëîæåíèå

(6) $$\mathrm{erf}(x) = \sum_{n \ge 0} w_n (x-y)^n ,$$

ãäå $w_n = v_n / n!$, à v_n óäîâëåòâîðÿþò ñîîòíîøåíèÿì

(7) $$v_{n+2} = 2yv_{n+1} - 2nv_n,\ n \ge 0;\ v_0 = \mathrm{erf}(x),\ v_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} .$$

Âû÷èñëåíèå erf(x) ïðè $x > 0$ ïðîèçâîäèòñÿ ïî ôîðìóëå

$$\mathrm{erf}(x) = -s_a(x_0) - s_a(x_1) - \ldots - s_a(x_k),$$

â êîòîðîé $s_a(z) = \sum_{n \ge 1} (-a)^n w_n(z)$, $x_0 = x$, $x_i = x_{i-1} - a$, $i \ge 1$, ïðè÷åì

$$a = \begin{cases} \Delta, \text{åñëè } x_{i-1} > \Delta \\ x_{i-1}, \text{åñëè } x_{i-1} \le \Delta \end{cases} ,$$

à k – íàèìåíüøåå öåëîå, òàêîå, ÷òî $x_{k-1} > \Delta$.

Àëãîðèòì B. Â ýòîì àëãîðèòìå ãóñåíèöà ïîëçåò èç x â íóëü ñ øàãîì à (ïðåäïîëàãàåì, ñëåäîâàòåëüíî, ÷òî à > 0).

```
B1. Ïîëîæèòü x1 = |x|; Fz = 0.
B2.  /* Ïðîâåðêà îêîí÷àíèÿ */ Åñëè x1 ≤ 0, ïîëîæèòü F  = 0.5 + sign(x)*Fz.
       Íà ýòîì ðàáîòà àëãîðèòìà çàêàí÷èâàåòñÿ.
B3. /* Óñòàíîâ øàãà */ Åñëè x1 ≤ a, ïîëîæèòü a = -x1.
B4. /* Ïîäãîòîâêà ê âû÷èñëåíèþ Fz */
        Ïîëîæèòü g0 = g1 = exp(-x1*x1/2)/√2π;
                 xn = -a; n = 1; t = sum = g1*xn.
B5. /* Âû÷èñëåíèå î÷åðåäíîé ÷àñòè÷íîé ñóììû */
     Ïîëîæèòü n = n + 1; xn = -a*xn/n;
              s = -x1*g1-(n-2)*g0; g0 = g1; g1 = s;
              s = t; t = sum; sum = t+g1*xn.
B6. /* Ïðîâåðêà òî÷íîñòè */ Åñëè |s-t| > ε èëè |t-sum| > ε, ïåðåéòè ê B5.
B7. /* Ïåðåäâèæåíèå */ Ïîëîæèòü Fz = Fz + sum; x1 = x1 - a;
       ïåðåéòè ê B2.
```

Â àëãîðèòìå 123 âûáðàíî $\Delta = 0.5$. Â êà÷åñòâå óñëîâèÿ îñòàíîâà ôèãóðèðóåò òðåáîâàíèå, ÷òîáû î÷åðåäíîé ïðèáàâëÿåìûé ÷ëåí íå ïðåâîñõîäèë ïî àáñîëþòíîé âåëè÷èíå 10^{-10}. Îñíîâíûì íåäîñòàòêîì àëãîðèòìà ÿâëÿåòñÿ âîçìîæíîñòü ïðåæäåâðåìåííîãî âûõîäà èç öèêëà, âû÷èñëÿþùåãî $s_a(x)$. Â ñàìîì äåëå, êîýôôèöèåíòû ðÿäà (6) ïðîïîðöèîíàëüíû ïîëèíîìàì Ýðìèòà

$$w_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-x^2} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} H_{n-1}(x).$$

Ïîýòîìó â òî÷êàõ y, ÿâëÿþùèõñÿ êîðíÿìè êàêîãî-ëèáî ïîëèíîìà, ñòàíäàðòíîå óñëîâèå îñòàíîâà, êîòîðîå çäåñü èìååò âèä $|w_n(y)(x-y)^n| \le \varepsilon$, ïðèâîäèò ê íåâåðíîìó ðåçóëüòàòó; ýòîò ôàêò îòìå÷åí â çàìå÷àíèè ê àëãîðèòìó [7]. Óñëîâèåì îñòàíîâà, ïðåäîõðàíÿþùèì îò ïðåæäåâðåìåííîãî îáðûâà ðÿäà Òåéëîðà, ìîæåò áûòü: $|s_n - s_{n-1}| \le \varepsilon$ & $|s_{n+1} - s_n| \le \varepsilon$. Ýòè ñîîáðàæåíèÿ ó÷òåíû â àëãîðèòìå **B**.

<u>Àëãîðèòì E.</u> Â ýòîì ïðåäñòàâëåíèè àëãîðèòìà 123 [8] óñëîâèå îñòàíîâà ìîäèôèöèðîâàíî óêàçàííûì âûøå ñïîñîáîì. Êðîìå òîãî, ÿ çàìåíèë íåñêîëüêî îïåðàòîðîâ àëãîðèòìà 123 òàê, ÷òî $s_a(z)$ âû÷èñëÿåòñÿ ÷óòü áîëåå ýêîíîìíî. Íàêîíåö, ïðè âû÷èñëåíèè $\Phi(x)$, èñïîëü-çóåòñÿ ôîðìóëà $\Phi(x) = \left(1 + \mathrm{erf}\left(x/\sqrt{2}\right)\right)/2$. Äëÿ îáëåã÷åíèÿ ñðàâíåíèÿ èñïîëüçîâàíû òå æå èäåíòèôèêàòîðû, ÷òî è â èñõîäíîì àëãîðèòìå.

```
E1. Ïîëîæèòü x1 = |x|/√2; z = 0.
E2. /* Ïðîâåðêà îêîí÷àíèÿ */ Åñëè x1 ≤ 0,  ïîëîæèòü F = 0.5 + sign(x)*z; íà ýòîì
        ðàáîòà àëãîðèòìà çàêàí÷èâàåòñÿ.
E3. /* Óñòàíîâêà øàãà */  Åñëè x1 ≤ a ïîëîæèòü a = x1.
E4. /* Ïîäãîòîâêà ê âû÷èñëåíèþ sa(x1) */
   Ïîëîæèòü n = 1; u = v = exp(-x1*x1)/√π; xn = a; s = 0; y = v*a.
E5. /* Âû÷èñëåíèå î÷åðåäíîé ÷àñòè÷íîé ñóììû sa(x1) */
    Ïîëîæèòü n = n+1; w = -2*(x1*v + u(*n-2));
       u = v; v = w; xn = -a*xn/n; w = s; s = y; y = y + v*xn.
E6. /* Ïðîâåðêà òî÷íîñòè */
    Åñëè |w - s| > ε èëè |s - y| > ε, ïåðåéòè ê E5.
E7. Ïîëîæèòü z = z + y; x1 = x1 - a è ïåðåéòè ê E2.
```

Äëÿ ïðîâåäåíèÿ ÷èñëåííûõ ýêñïåðèìåíòîâ àëãîðèòìû **D**, **P**, **C**, **B** è **E** áûëè ðåàëèçîâàíû íà Ñè. Â íèæåñëåäóþùåé òàáëèöå äëÿ êàæäîãî àëãîðèòìà ïðèâîäèòñÿ êîëè÷åñòâî "âèòêîâ" öèêëà, ïîòðåáîâàâøèõñÿ äëÿ âû÷èñëåíèÿ çíà÷åíèÿ ñ $\varepsilon = 0$ äëÿ íåñêîëüêèõ x; ïîñêîëüêó âñå àëãîðèòìû äàëè îäèíàêîâûå 8 çíàêîâ ïîñëå çàïÿòîé, ñàìè âû÷èñëåííûå çíà÷åíèÿ îïóùåíû.

x	D	P	C	B	E
0.25	14	16	16	16	16
0.50	20	23	20	21	21
0.75	15	18	37	36	34
1.00	1	2	42	42	40
1.25	15	17	59	57	45
1.50	19	25	65	62	60
1.75	15	19	83	78	64
2.00	1	2	88	83	70
2.25	15	18	106	99	85

2.50	19	27	112	104	89
2.75	15	20	131	120	94
3.00	1	2	137	125	111
3.25	15	20	157	141	115
3.50	18	29	163	147	121
3.75	14	21	183	163	135
4.00	1	2	190	168	140
4.25	14	21	211	185	155
4.50	17	32	218	190	161
4.75	13	23	239	206	168
5.00	1	2	246	212	182
5.25	13	22	268	229	190
5.50	15	33	275	235	195
5.75	12	24	297	253	212
6.00	1	2	305	258	218
6.25	12	23	328	277	224
6.50	15	36	336	282	241
6.75	10	25	359	302	247
7.00	1	2	367	307	251
7.25	10	24	391	327	270
7.50	11	38	399	332	275
7.75	6	26	423	353	283

Ñðàâíåíèå ðåçóëüòàòîâ ðàáîòû âñåõ ýòèõ àëãîðèòìîâ ïîçâîëÿåò êîíñòàòèðîâàòü çäåñü ïîëíîå òîðæåñòâî ãðóáîé ñèëû íàä êðàñîòîé è èçÿùåñòâîì; çäåñü äàæå íå íóæíî ó÷èòûâàòü êîëè÷åñòâî îïåðàöèé âíóòðè öèêëà – âñå ÿñíî è áåç ýòîãî. Èç àëãîðèòìîâ **P** è **D** ëó÷øèì îêàçàëñÿ àëãîðèòì **D**. Åñëè äëÿ íåãî ïîíàäîáÿòñÿ êîíñòàíòû Φ_i, ÿ ðåêîìåíäóþ âû÷èñëÿòü èõ ñ ïîìîùüþ ñìåñè àëãîðèòìîâ **T** è **L** èç §1 ñ èñïîëüçîâàíèåì äëèííîé àðèôìåòèêè.

Ï ðèì å÷àí èå. Ï ðèâîäèì ûå í èæå êîäû àëãîðèòì îâ èç ðàçäåëîâ 1 è 3 ï ðåäí àçí à÷åí û ëèøü äëÿ ÷èñëåí í ûõ ýêñï åðèì åí òîâ, èõ ñëåäóåò ðàññì àòðèâàòü ëèøü êàê èëëþñòðàöèè. "Ðàáî÷èå" êîäû äîëæí û ó÷èòûâàòü ì í îæåñòâî òîí êèõ ì îì åí òîâ, ñðåäè êîòîðûõ îñí îâí îå ï îä÷åðêí ó ï ðîãðàì ì í óþ ñèñòåì ó îáðàáîòêè èñêëþ÷èòåëüí ûõ ñèòóàöèé. (Ï îäîáí àÿ ñèñòåì à ðàçðàáàòûâàåòñÿ, êàê ï ðàâèëî, ñðàçó äëÿ *áèáëèîòåêè ôóí êöèé*.) Ï ðèâåäó ëèøü îäèí èç ñî î áðàæåí èé ï ðè ì åðîâ ì åëêèõ õèòðîñòåé, îêàçûâàþ ù èõ ðåø àþ ù åå âëèÿí èå í à ýôôåêòèâí îñòü ï ðîãðàì ì û: â êîäàõ, ðåàëèçóþ ù èõ àëãîðèòì û **P** è **D**, ï ðè âû÷èñëåí èè í à ñàì îì ï åðâîì ø àãå í å äîñòàòî÷í î îòáðîñèòü äðîáí óþ ÷àñòü – í åîáõîäèì î ÷åñòí î âû÷èñëèòü öåëóþ ÷àñòü äðîáè (ýòî îòðàæåí î â ï ðèâåäåí í ûõ êîäàõ).

Ï ðèëî æåí èå À.
Âû÷èñëåí èå ðÿäî â è öåï í ûõ äðî áåé

Âñå î ï èñàí í ûå â äàí í î ì òåêñòå àëãîðèòì û óñòðîåí û ï î åäèí îé ñõåì å. Çäåñü îï èñû âàåòñÿ ýòà ñõåì à.

Ðÿäû

Â äàí í î é ðàáî òå í àì í óæí î ñóì ì èðî âàòü ðÿäû âèäà

$$f(x) = \sum_{n \ge 0} t_n ,$$

ãäå $t_{n+1} = g(t_n)$. Âû÷èñëåí èÿ ï ðî èçâî äÿòñÿ ñòàí äàðòí ûì ñï î ñî áî ì :

(1) $s_0 = 0;\ s_{n+1} = s_n + t_n,\ n > 0;$

â êà÷åñòâå óñëî âèÿ î ñòàí î âà ôè ãóðèðóåò

(2) $|s_{n+1} - s_n| \le \varepsilon ,$

ãäå ε – òðåáóåì àÿ òî ÷í î ñòü ñ÷åòà.

Î òì åòèì , ÷òî äëÿ í åêî òî ðûõ – â ÷àñòí î ñòè, çí àêî ï åðåì åí í ûõ – ðÿäî â èçâåñòí ûì ù å èç ø êî ëû êðèòåðèåì äî ñòèæåí èÿ í óæí î é òî ÷í î ñòè ÿâëÿåòñÿ

(3) $|t_n| \le \varepsilon .$

Î äí àêî , âû÷èñëåí èÿ ï ðî èçâî äÿòñÿ ñ êî í å÷í î é ðàçðÿäí î ñòüþ , è ï î òî ì ó ï ðè óðàâí èâàí èè ï î ðÿäêî â, í åî áõî äèì î ì äëÿ âûï î ëí åí èÿ î ï åðàöèè ñëî æåí èÿ, ï ðèáàâëÿåì àÿ ê s_n âåëè÷èí à τ_{n+1} ì î æåò è í å ñî âï àäàòü ñ t_{n+1} (ò.ê. $t_n << s_{n-1}$, òî ï ðè äî ñòàòî ÷í î áî ëüø èõ n î áÿçàòåëüí î áóäåò $\tau_n < t_n$). Ï ðè ýòî ì óñëî âèå (3) í à÷èí àåò âûï î ëí ÿòüñÿ ï î çæå óñëî âèÿ (2), î çí à÷àþ ù åãî , ÷òî $\tau_{n+1} \le \varepsilon$. Ï î ýòî ì ó âî âñåõ àëãî ðèòì àõ óñëî âèåì î ñòàí î âà ÿâëÿåòñÿ èì åí í î (2); ýòî ï ðèâî äèò ê óì åí üø åí èþ ÷èñëà ñóì ì èðóåì ûõ ÷ëåí î â ðÿäà.

Ìàøèííûå ýêñïåðèìåíòû ïîêàçàëè, ÷òî èñïîëüçîâàíèå (3) â êà÷åñòâå óñëîâèÿ îñòàíîâà ëèøü óâåëè÷èâàåò âðåìÿ ñ÷åòà, íå óâåëè÷èâàÿ â ðàññìîòðåííûõ àëãîðèòìàõ òî÷íîñòü âû÷èñëåíèé.

Àëãîðèòìû, îñíîâàííûå íà ïðèìåíåíèè ðÿäîâ, âñå èìåþò ñëåäóþùóþ ñòðóêòóðó:

```
/* P1 */ sum = term = t0;
         do
/* P2 */    term = g(term); s = sum; sum = s + term;
/* P3 */ while abs(s - sum) > ?;
         return sum;
```

Ðèñ. 1. Ñòðóêòóðà àëãîðèòìà, âû÷èñëÿþùåãî ðàçëîæåíèå â ðÿä.

Îòìåòèì, ÷òî åñëè â óñëîâèè îñòàíîâà öèêëà (øàã P3) ñòðîãîå íåðàâåíñòâî çàìåíèòü íà íåñòðîãîå, òî ïðè $\varepsilon = 0$ (ò.å. ïðè *âû÷èñëåíèÿõ ñ ìàøèííîé òî÷íîñòüþ*) àëãîðèòì çàöèêëèòñÿ.

Â íåñêîëüêèõ àëãîðèòìàõ, â êîòîðûõ ïðèõîäèòñÿ ñóììèðîâàòü «ïëîõî îïðåäåëåííûå» ðÿäû ñ çíàêîïåðåìåííûìè ÷ëåíàìè, óñëîâèåì îñòàíîâà ÿâëÿåòñÿ

(4) $\mathrm{abs}(s_n - s_{n+1}) \le \varepsilon \ \&\& \ \mathrm{abs}(s_{n+1} - s_n) \le \varepsilon .$

Öåïíûå äðîáè

Öåïíûå äðîáè óäîáíû âî ìíîãèõ òåîðåòè÷åñêèõ è ïðèêëàäíûõ èññëåäîâàíèÿõ. Îíè, â ÷àñòíîñòè, èñïîëüçóþòñÿ â ðàçëè÷íûõ ïðèáëèæåííûõ âû÷èñëåíèÿõ. Ñ èõ ïîìîùüþ ìîæíî, íàïðèìåð, âû÷èñëÿòü çíà÷åíèÿ ôóíêöèé, ïðè÷åì î÷åíü ÷àñòî àëãîðèòì, îñíîâàííûé íà ïîäõîäÿùåì ðàçëîæåíèè, ñõîäèòñÿ áûñòðåå, ÷åì àëãîðèòì, îñíîâàííûé íà ðàçëîæåíèè ôóíêöèè â ñòåïåííîé ðÿä.

Öåïíîé, èëè *íåïðåðûâíîé, äðîáüþ* íàçûâàåòñÿ âûðàæåíèå

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}}$$

Èç-çà ãðîìîçäêîñòè ýòîãî ñïîñîáà çàïèñè îí ïî÷òè íå èñïîëüçóåòñÿ. Îáû÷íî öåïíóþ äðîáü çàïèñûâàþò â âèäå

(5) $$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} \cdots \text{èëè}$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 + \ldots} \frac{a_n}{b_n + \ldots}$$

Ëè÷íî ÿ ïðåäïî÷èòàþ îáîçíà÷åíèå (5).

Äðîáü íàçûâàåòñÿ *n-ì çâåíîì* öåïíîé äðîáè; a_n è b_n – ÷ëåíàìè åå n-ãî çâåíà; a_1, a_2,... íàçûâàþò åå ÷àñòíûìè ÷èñëèòåëÿìè, à b_1, b_2,... – åå *÷àñòíûìè çíàìåíàòåëÿìè*; b_0 íàçûâàþò *íóëåâûì çâåíîì* öåïíîé äðîáè.

Êîíå÷íàÿ öåïíàÿ äðîáü

$$w_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} \tag{6}$$

íàçûâàåòñÿ n-é *ïîäõîäÿùåé äðîáüþ* äðîáè (5). ß îïèøó çäåñü òðè ñïîñîáà, êîòîðûå ìîæíî èñïîëüçîâàòü äëÿ âû÷èñëåíèÿ (6).

Ñïîñîá 1

Ýòîò ñïîñîá ñîñòîèò â ïîñëåäîâàòåëüíîì îñóùåñòâëåíèè óêàçàííûõ â (6) äåéñòâèé. Ôîðìàëüíî ïðîöåññ ìîæíî âûðàçèòü ñëåäóþùèìè ñîîòíîøåíèÿìè

$$r_{n-i} = b_{n-i} + s_{n-i+1},\quad s_{n-i} = a_{n-i}/r_{n-i},\quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \tag{7}$$

ãäå $s_0 = 0$. Ïðè ýòîì n-ÿ ïîäõîäÿùàÿ äðîáü $w_n = b_0 + s_1$.

Ìåòîä ëåãêî ïðîãðàììèðóåòñÿ, îäíàêî, îáëàäàåò îäíèì íåäîñòàòêîì: ïðè èçìåíåíèè n âåñü ïðîöåññ íóæíî íà÷èíàòü ñ ñàìîãî íà÷àëà. À òàê êàê äîñòèãàåìàÿ òî÷íîñòü îïðåäåëÿåòñÿ âûáðàííûì çíà÷åíèåì n, òî ïðè èñïîëüçîâàíèè ýòîãî ñïîñîáà ïðèõîäèòñÿ âûáèðàòü åãî íàñòîëüêî áîëüøèì, ÷òîáû îáåñïå÷èòü òðåáóåìóþ òî÷íîñòü â íàèõóäøåì âîçìîæíîì ñëó÷àå. Ïðè ýòîì, ÷àñòî ïðèõîäèòñÿ ïðîèçâîäèòü ëèøíèå âû÷èñëåíèÿ, êîòîðûå ìîãóò îêàçàòüñÿ äîâîëüíî çíà÷èòåëüíûìè. Ìíå èçâåñòåí ëèøü îäèí ïðèìåð óñïåøíîãî ïðèìåíåíèÿ ýòîãî ñïîñîáà âû÷èñëåíèÿ öåïíûõ äðîáåé: ïðè âûâîäå ôîðìóë âû÷èñëåíèÿ ýëåìåíòàðíûõ ôóíêöèé äëÿ ñòàíäàðòíûõ áèáëèîòåê.

Ñïîñîá 2

Â ýòîì ñïîñîáå n-ÿ ïîäõîäÿùàÿ äðîáü âû÷èñëÿåòñÿ êàê îòíîøåíèå p_n/q_n, ïðè÷åì p_n è q_n íàõîäÿò èç *îñíîâíûõ ðåêóððåíòíûõ ñîîòíîøåíèé* (ñì., íàïðèìåð, [6]):

$$\begin{cases} p_0 = b_0, q_0 = 1; \\ p_1 = b_0 b_1 + a_1, q_1 = b_1; \\ p_{n+1} = b_{n+1} p_n + a_{n+1} p_{n-1}, \\ q_{n+1} = b_{n+1} q_n + a_{n+1} q_{n-1} \end{cases} \tag{8}$$

Ïðåèìóùåñòâî ýòîãî ìåòîäà ïî ñðàâíåíèþ ñ ïðåäûäóùèì ñîñòîèò â òîì, ÷òî íà êàæäîì ýòàïå âû÷èñëåíèé ïîäõîäÿùóþ äðîáü ìîæíî ñðàâíèòü ñ ðàíåå âû÷èñëåííûìè ïðèáëèæåíèÿìè è, åñëè íóæíàÿ òî÷íîñòü äîñòèãíóòà, îñòàíîâèòü ïðîöåññ.

Íåäîñòàòêîì åãî ÿâëÿåòñÿ òî, ÷òî âåëè÷èíû p_n è q_n î÷åíü áûñòðî âîçðàñòàþò, åñëè $a_n > 1$, $b_n > 1$, è áûñòðî óáûâàþò, åñëè $a_n < 1$, $b_n < 1$. À ýòî ìîæåò ïðèâåñòè ëèáî ê ïåðåïîëíåíèþ, ëèáî ê íåîáõîäèìîñòè äåëåíèÿ íà (ìàøèííûé) íóëü. Äëÿ áîðüáû ñ ýòèì ïðèìåíÿþòñÿ ðàçíîîáðàçíûå íîðìèðîâêè, êîòîðûå ëèøàþò àëãîðèòì ïðîçðà÷íîñòè è óâåëè÷èâàþò ðàñïðîñòðàíÿåìóþ îøèáêó; òåì íå ìåíåå, áûâàþò ñèòóàöèè, êîãäà áåç ýòîãî íå îáîéòèñü.

Ñï î ñî á 3

Çäåñü äëÿ n-é ï î äõî äÿù åé äðî áè èñï î ëüçóåòñÿ ñëåäóþ ù åå ñî î òí î ø åí èå

(9) $$w_n = b_0 + \sum_{k=1}^{n} \rho_1\rho_2\cdots\rho_k ,$$

â êî òî ðî ì

(10) $$r_k = a_k/(b_{k-1}b_k),\ 1+\rho_{k+1} = 1/(1+r_{k+1}(1+\rho_k)),\ k \ge 2,$$

ï ðè÷åì $r_1 = \rho_1 = a_1/b_1,\ 1+\rho_2 = 1/(1+r_2)$.

Ýòî ò ì åòî ä î áëàäàåò òåì æå äî ñòî èí ñòâî ì , ÷òî è ì åòî ä 2: ï î äõî äÿù èå äðî áè ï î ëó÷àþ òñÿ ðåêóðñèâí û ì ñï î ñî áî ì , ÷òî ï î çâî ëÿåò ñëåäèòü çà äî ñòèãí óòî é òî ÷í î ñòüþ . Âì åñòå ñ òåì , ï ðè âû÷èñëåí èÿõ í å âî çí èêàþ ò í è ñëèø êî ì áî ëüø èå, í è ñëèø êî ì ì àëû å ÷èñëà, ï î ýòî ì ó ýòî ò ì åòî ä ï ðåäñòàâëÿåòñÿ í àèáî ëåå ï ðåäï î ÷òèòåëüí û ì .

Ï î ñêî ëüêó ñî î òí î ø åí èÿ (9)-(10) ï î ÷òè í å âñòðå÷àþ òñÿ â èì åþ ù åéñÿ í à ðóññêî ì ÿçû êå ëèòåðàòóðå, ï ðèâåäåì çäåñü èõ âû âî ä.

Ø èðî êî èçâåñòí î ñëåäóþ ù åå ðàâåí ñòâî (ñì ., í àï ðèì åð, [6]):

(11) $$w_n = b_0 + \frac{a_1}{q_0q_1} - \frac{a_1a_2}{q_1q_2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{q_{n-1}q_n} .$$

Ï î ëî æèì $A_n = (-1)^n \frac{a_1a_2\cdots a_n}{q_{n-1}q_n}$ è ðàññì î òðèì î òí î ø åí èå $\rho_{n+1}=A_{n-1}/A_n$. Èì ååì

$$\rho_{n+1} = -\frac{a_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}} = -\frac{1}{\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\frac{q_n}{q_{n-1}}+1} ;$$

Çäåñü èñï î ëüçî âàí î ñî î òí î ø åí èå (8). Í î èç (8) òàêæå ñëåäóåò

$q_{n+1} = (q_n - a_n q_{n-2})/b_n$

Ï î ëî æèì $r_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_nb_{n+1}}$. Òàê êàê $\rho_n = -a_nq_{n-2}/q_n$, ï î ëó÷àåì

$$\rho_{n+1} = -r_{n+1}(1+\rho_n)/(1+r_{n+1}(1+\rho_n)).$$

Î òñþ äà è èç (11) ñëåäóþ ò ñî î òí î ø åí èÿ (9)-(10).

Àëãî ðèòì û , î ñí î âàí í û å í à ðàçëî æåí èè ô óí êöèè f(x) â öåï í óþ äðî áü, èì åþ ò â äàí í î ì òåêñòå ñëåäóþ ù óþ ñòðóêòóðó:

```
/*F1 */ t = b0; term = a1/b1; s = t+term; rho = 1/(1+a2/b1/b2);
```

```
        term = (rho-1)*term; sum = s+term; k=3;
        do
/*F2 */    r = ak/bk-1/bk; rho = 1/(1+r*rho);
           term = (rho-1)*term; t = s; s = sum; sum = s+term;
           k = k+1;
/*F3 */ while abs(t-s) > ? & abs(s-sum) > ?;
        return sum;
```

Ðèñ. 2. Ñòðóêòóðà àëãîðèòìà, âû÷èñëÿþùåãî öåïíóþ äðîáü.

Êîììåíòàðèè

Ñóììèðîâàíèå ðÿäà (11) ïðîèçâîäèòñÿ çäåñü íà îñíîâå àëãîðèòìà **P** ñ óñëîâèåì îñòàíîâà (4).

Åñëè áû äëÿ âû÷èñëåíèÿ ìû èñïîëüçîâàëè ñîîòíîøåíèÿ (8), øàãè F1 è F2 àëãîðèòìà ïðèíÿëè áû âèä:

```
/*F'1 */   p0 = b0; q0 = 1; q1 = b1; p1 = p0*q1+a1; sum = p1/q1; k = 1;
```

è

```
/*F'2 */   k = k+1; t = bkp1+ak*p0; p0 = p1; p1 = t;
                   t = bk*q1+ak*q0; q0 = q1; q1 = t;
          t = s; s = sum; sum = p1/q1;
```

Ìû âèäèì, ÷òî ÷èñëî îïåðàöèé, âûïîëíÿåìûõ â òåëå öèêëà, ïðè ýòîì íå óìåíüøèëîñü áû.

Äàëüíåéøèå ñâåäåíèÿ î öåïíûõ äðîáÿõ è èõ ïðèëîæåíèÿõ ìîæíî ïî÷åðïíóòü èç êíèã [3, 6]; èçëîæåíèå ñïîñîáà âû÷èñëåíèÿ öåïíûõ äðîáåé, à òàêæå ìíîæåñòâî ïîó÷èòåëüíûõ ÷èñëåííûõ ïðèìåðîâ âû íàéäåòå â ñòàòüå [14].

Ïðèëîæåíèå Á:
Çíà÷åíèÿ F (x) â íåñêîëüêèõ òî÷êàõ

Ñîäåðæàùèå çäåñü çíà÷åíèÿ $\Phi(x)$, î÷åíü ïîëåçíûå ïðè îòëàäêå è ïðîâåðêå àëãîðèòìîâ, ïîëó÷åíû ïðîñòûì ïåðåñ÷åòîì äàííûõ èç ðàáîòû [15]:

x	$\Phi(x)$
0.0	0.5
0.5	0.69146 24612 74013
1.0	0.84134 47460 68543
1.5	0.93319 27987 31142
2.0	0.97724 98680 51821

2.5	0.99379 03346 74224
3.0	0.99865 01019 68370
3.5	0.99976 73709 20964
4.0	0.99996 83287 58167
4.5	0.99999 66023 26876
5.0	0.99999 97133 48428
5.5	0.99999 99810 10438
6.0	0.99999 99990 13412
6.5	0.99999 99999 59840
7.0	0.99999 99999 98720
7.5	0.99999 99999 99968
8.0	0.99999 99999 99999

Ï ðèëî æåí èå Â:
Êî äû í à Ñè äëÿ àëãî ðèòì î â èç §1

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>

#define sign(x) (x == 0 ? 0 : (x < 0 ? -1 : 1))
const double pi_const=0.3989422804014;
int N;

double
I(double x, double eps)
{
   double t=x, sum=t, x2=x*x, s=0;
   int n;

   N=0;
   for(n=2; fabs(s-sum) > eps; n+=2) {
      t*=-x2/n; s=sum; sum+=t/(n+1);
      N++; /* Âíåøíÿÿ ïåðåìåííàÿ! */
   }
   return 0.5+sum*pi_const;
           /* 8+11*N îïåðàöèé   */
}

double
T(double x, double eps)
{
   double t=x, sum=t, x2=x*x, s=0;
   int n;

   N=0;
   for(n=3; fabs(s-sum) > eps; n+=2) {
```

```
      t*=x2/n; s=sum; sum+=t;
      N++; /* Âíåøíÿÿ ïåðåìåííàÿ! */
   }
   return 0.5+sign(x)*sum*exp(-x2/2.)*pi_const;
           /* 14+8*N îïåðàöèé   */
}

double
S(double x, double eps)
{
   double x2=x*x,
          rho=1./(3.-x2),
          sum=fabs(x)*rho, term=x2*sum, t=0, s;
   int n;

   N=0;
   rho*=3.; s=(sum*=3.);
   for(n=2; (x2<0) || ((fabs(s-t) > eps) || (fabs(s-sum) > eps)); n++) {
      rho = 1./(1.+rho*x2*n/(4.*n*n-1));
      term*=rho-1; t=s; s=sum; sum+=term;
      x2=-x2;
      N++; /* Âíåøíÿÿ ïåðåìåííàÿ! */
   }
   return 0.5+sign(x)*sum*exp(-x2/2.)*pi_const;
           /* 23+25*N îïåðàöèé  */

}

double
L(double x, double eps)
{
   double x2=x*x, y=exp(-x2/2.)*pi_const,
          sum, term, r, rho, t, s;

   N=0;
   if (x == 0) return 0.5;
   x2=1./x2; term=sum=y/fabs(x); r=s=0; rho=1;
   do {
      r+=x2; rho=1./(1+r*rho); term*=rho-1;
      t=s; s=sum; sum+=term;
      N++; /* Âíåøíÿÿ ïåðåìåííàÿ! */
   } while(fabs(s-t) > eps || fabs(s-sum) > eps);
   return (x > 0 ? 1-sum : sum);
           /* 16+10*N îïåðàöèé  */
}

void main(void)
{
   double x;
   double f;

   for(x=0.25; x<8; x+=0.25) {
#ifdef TABLE
      printf("\n  %4.2f", x);
      f = I(x,0);
      printf("\t%d\t%d", N, 8+11*N);
      f = T(x,0);
      printf("\t%d\t%d", N, 14+8*N);
      f = S(x,0);
      printf("\t%d\t%d", N, 23+25*N);
      f = L(x,0);
      printf("\t%d\t%d", N, 16+10*N);
#else
      f = I(x,0);
      printf("\nI(%4.2f)=%10.8g\t%d\t%d", x, f,N,8+11*N);
      f = T(x,0);
      printf("\nT(%4.2f)=%10.8g\t%d\t%d", x, f,N,14+8*N);
      f = S(x,0);
      printf("\nS(%4.2f)=%10.8g\t%d\t%d", x, f,N,23+25*N);
      f = L(x,0);
      printf("\nL(%4.2f)=%10.8g\t%d\t%d", x, f,N,16+10*N);
#endif
```

```
   }
}
```

Ïðèëîæåíèå Ã: Êîäû íà Ñè äëÿ àëãîðèòìîâ èç §3

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>

#define sign(x) (x == 0 ? 0 : (x < 0 ? -1 : 1))
const double pi_const=0.3989422804014;
int N;

double
D(double x, double eps)
{
   double x1, xn,g0, g1, s=0, sum, t, z;
   static const double PHI[] = {
               0.5,                  /* x=0 */
               0.841344746068543,    /* x=1 */
               0.977249868051821,    /* x=2 */
               0.998650101968370,    /* x=3 */
               0.999968328758167,    /* x=4 */
               0.999999713348428,    /* x=5 */
               0.999999999013412,    /* x=6 */
               0.999999999998720,    /* x=7 */
               0.999999999999999     /* x=8 */
          },
          H=1.0;
   int i, n;

   x1=fabs(x); i=(int)(x1/H+0.5); z=i*H;
   g0=t=PHI[i]; g1=exp(-z*z/2.)*pi_const;
   xn=(x1-=z); sum=t+g1*xn;
   N=0;
   for(n=2;fabs(s-t) > eps || fabs(t-sum) > eps; n++) {
      s=-z*g1-(n-2)*g0; g0=g1; g1=s; xn*=x1/n;
      s=t; t=sum; sum+=g1*xn;
      N++; /* Âíåøíÿÿ ïåðåìåííàÿ! */
   }
   return (x>0 ? sum : 1-sum);
}

double
P(double x, double eps)
{
   double x1, xn,c0, c1, rz, s, t=0, z;
   int i, n;
   static const double R[] = {
               0.,
               1.4106861306,
               8.8394391760,
               112.51515173,
               3735.8400745,
               336310.71435,
               82292564.750,
               54736210525.,
               98965389434000.
           },
          H=1.0;

   x1=fabs(x); i=(int)(x1/H+0.5); z=i*H;
   c0=s=R[i]; c1=1.+z*c0;
   xn=(x1-=z); rz=s+c1*xn;
   N=0;
   for(n=2; fabs(s-t) > eps || fabs(t-rz) > eps; n++) {
      s=(c0+c1*z)/n; c0=c1; c1=s; xn*=x1;
      s=t; t=rz; rz+=c1*xn;
      N++; /* Âíåøíÿÿ ïåðåìåííàÿ! */
```

```
   }
   return 0.5+sign(x)*rz*exp(-x*x/2)*pi_const;
}

double
F(double x, double eps)
{
   double x1=fabs(x), a, z=0, fz=0;
   double t, s, sum, xn, g0, g1;
   int n;
   double h=0.25;

   N=0;
   while((a=x1-z)>0) {
      if (a > h) a = h;
        /* Ïîäãîòîâêà ê âû÷èñëåíèþ ðÿäà. */
      xn = a; g0 = g1 = exp(-z*z/2)*pi_const;
      t = sum = g1*xn;
      for(n=2, s=0;(fabs(s-t)>eps) || (fabs(t-sum)>eps); n++) {
         N++; /* Âíåøíÿÿ ïåðåìåííàÿ! */
            /* Âû÷èñëèì î÷åðåäíóþ ÷àñòè÷íóþ ñóììó */
         xn *= a/n; s = -z*g1-(n-2)*g0;
         g0 = g1; g1 = s; s = t; t = sum; sum += g1*xn;
      };
         /* Â ò. z ðàçëîæåíèå ïîñ÷èòàíî - ïîøëè äàëüøå */
      fz += sum; z += a;
   }
   return 0.5 + sign(x)*fz;
}

double
C(double x, double eps)
{
   double x1, ra, rz, z, d;
   double t, s, xa, xn, c0, c1;
   int n, gotta=0;
   double h=0.5;

   x1=fabs(x); rz=t=z=0;
   N=0;
   while(!gotta) {
      xa=z; ra=rz; z+=h;
      if(z >= x1) {
        z = x1; gotta = 1;
      }

      c0=s=ra; c1=1.+xa*ra;
      xn=d=z-xa; rz=ra+c1*xn;
      for(n=2;(fabs(s-t)>eps) || (fabs(s-rz)>eps); n++) {
         N++; /* Âíåøíÿÿ ïåðåìåííàÿ! */
            /* Âû÷èñëèì î÷åðåäíóþ ÷àñòè÷íóþ ñóììó */
         t=(c0+xa*c1)/n; c0=c1; c1=t; xn*=d;
         t=s; s=rz; rz=s+c1*xn;
      };

   }
   return 0.5 + sign(x)*rz*exp(-x*x/2)*pi_const;
}

double
B(double x, double eps)
{
   double x1=fabs(x), fz=0;
   double t, s, sum, xn, g0, g1;
   int n;
   double a=0.5;

   N=0;
   while(x1>0) {
      if (x1 <= a) a = x1;
        /* Ïîäãîòîâêà ê âû÷èñëåíèþ ðÿäà. */
      xn = a; g0 = g1 = exp(-x1*x1/2)*pi_const;
```

```
      t = sum = g1*xn;
      for(n=2, s=0;(fabs(s-t)>eps) || (fabs(t-sum)>eps); n++) {
         N++; /* Âíåøíÿÿ ïåðåìåííàÿ! */
            /* Âû÷èñëèì î÷åðåäíóþ ÷àñòè÷íóþ ñóììó */
         xn *= -a/n; s = -x1*g1-(n-2)*g0;
         g0 = g1; g1 = s; s = t; t = sum; sum += g1*xn;
      };
         /* Â ò. z ðàçëîæåíèå ïîñ÷èòàíî - ïîøëè äàëüøå */
      fz += sum; x1 -= a;
   }
   return 0.5 + sign(x)*fz;
}

double
E(double x, double eps)
{
   double x1=fabs(x)*0.707106781186548, z=0;
   double y, s, xn, u, v, w=0;
   int n;
   double a=0.5;

   N=0;
   while(x1>0) {
      if (x1 <= a) a = x1;
        /* Ïîäãîòîâêà ê âû÷èñëåíèþ ðÿäà. */
      xn = a; u = v = exp(-x1*x1)*0.564189583547756;
      s = y = v*a;
      for(n=2;(fabs(w-s)>eps) || (fabs(s-y)>eps); n++) {
         N++; /* Âíåøíÿÿ ïåðåìåííàÿ! */
            /* Âû÷èñëèì î÷åðåäíóþ ÷àñòè÷íóþ ñóììó */
         w=-2.*(x1*v+u*(n-2.));
         u=v; v=w; xn*=-a/n; w=s; s=y; y+= v*xn;
      };
         /* Â ò. z ðàçëîæåíèå ïîñ÷èòàíî - ïîøëè äàëüøå */
      z+=y; x1-=a;
   }
   return 0.5 + sign(x)*z;
}

void main(void)
{
   double x;
   double f;

   for(x=0.25; x<8; x+=0.25) {
#ifdef TABLE
      printf("\n  %4.2f", x);
      f = D(x,0);
      printf("\t%d", N);
      f = P(x,0);
      printf("\t%d", N);
      f = C(x,0);
      printf("\t%d", N);
      f = B(x,0);
      printf("\t%d", N);
      f = E(x,0);
      printf("\t%d", N);
#else
      f = D(x,0);
      printf("\nD(%4.2f)=%10.8g\t%d", x, f, N);
      f = P(x,0);
      printf("\nP(%4.2f)=%10.8g\t%d", x, f, N);
      f = C(x,0);
      printf("\nC(%4.2f)=%10.8g\t%d", x, f, N);
      f = B(x,0);
      printf("\nB(%4.2f)=%10.8g\t%d", x, f, N);
      f = E(x,0);
      printf("\nE(%4.2f)=%10.8g\t%d", x, f, N);
#endif
   }
}
```

Ëèòåðàòóðà

Äóíàåâ Ï.Í. *Âû÷èñëåíèå ïðÿìûõ è îáðàòíûõ ôóíêöèé ðàñïðåäåëåíèÿ*. Ñåð. "Ñòàòèñòèêà è ñòîõàñòè÷åñêèå ñèñòåìû", âûï. 15, Èçä-âî ÌÃÓ, 1971.

Äóíàåâ Ï.Í. *Î âû÷èñëåíèè ãàììà-ðàñïðåäåëåíèÿ*. Ñá. "Âû÷èñëèòåëüíûå ìåòîäû è ïðîãðàììèðîâàíèå", ¹ 18, ÌÃÓ, 1971.

Ëàíñ Äæ.Í. *×èñëåííûå ìåòîäû äëÿ áûñòðîäåéñòâóþùèõ âû÷èñëèòåëüíûõ ìàøèí*. ÈË, Ì. 1962.

Ìàê-Êðàêåí Ä., Äîðí Ó. *×èñëåííûå ìåòîäû è ïðîãðàììèðîâàíèå íà ÔÎÐÒÐÀÍå*. Ì.: Ìèð, 1969.

ÒÀÁËÈÖÛ ÂÅÐÎßÒÍÎÑÒÍÛÕ ÔÓÍÊÖÈÉ, òîì Ï. Ì., ÂÖ ÀÍ ÑÑÑÐ, 1959.

Õåììèíã Ð.Â. *×èñëåííûå ìåòîäû*. Ì.: Íàóêà, 1968.

Õîâàíñêèé À.Í. *Ïðèëîæåíèå öåïíûõ äðîáåé è èõ îáîáùåíèé ê âîïðîñàì ïðèáëèæåííîãî àíàëèçà*. Ì.:ÃÈÒÒË, 1956.

Barton S.P., Wagner J.F. *Remarks on algorithm* 123. CACM, 1964, No.3.

Crawford M., Techo R. *Algorithm* 123. *CACM*, 1962, No.9.

Cyvin S.J. *Algorithm* 226. *CACM*, 1967, No.7.

Hastings C., Hayward J.T., Wong J.P. *Approximations for digital computers*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1955

Hill I.D., Joyce S.A. *Algorithm* 304. CACM, 1967, No. 10.

McLaren M.D. *Algorithm* 272. CACM, 1965, No. 12.

Shenton L.R. *Inequalities for the normal integral including a new continued fraction*. Biometrika, 1956, v.41, p.177

Teichroew D. Use of continued fractions in high-speed computing. Math. Tables Aids Comput., 1952, v.6, p.127